



NÁVRH A VALIDÁCIA MATEMATICKÉHO MODELU ZMIEN KVALITY STROMOV A PORASTOV

RÓBERT SEDMÁK¹, ĽUBOMÍR SCHEER¹, ANDREA MELCEROVÁ²

¹Technická univerzita vo Zvolene, Lesnícka fakulta, T. G. Masaryka 24, SK – 960 53 Zvolen,
e-mail: sedmak@vsl.d.tuzvo.sk

²Národné lesnícke centrum - Ústav lesníckeho poradenstva a vzdelávania Zvolen, Sokolská 2,
SK – 960 52, Zvolen, e-mail: andrea.melcerova@nlcsk.org

SEDMÁK, R., SCHEER, Ľ., MELCEROVÁ, A., 2011: Proposal and validation of the mathematical model of stem quality changes of the individual trees and stands. *Lesn. Čas. – Forestry Journal*, **58**(2): 92–99, 2012, fig. 2, tab. 5, ref. 13, ISSN 0323 – 1046. Original paper.

The main objective of the presented paper is to propose the mathematical model of the stem quality development based on mathematical method of Markov chains. Parameterisation and validation of the proposed model was carried out employing the empirical material of long-term research plots established in beech stands. Practical application and validation showed that the model has no bias and it has also a relatively good precision of the prediction of the relative frequency of the stem quality at the stand level. Therefore, the proposed model is potentially usable for modelling of qualitative dynamic changes of individual trees and whole stands as well in the growth simulator Sibyla.

Keywords: *model, stem quality, Markov chains, beech*

Cieľom predkladanej práce je navrhnúť matematický model vývoja kvality kmeňov jednotlivých stromov s využitím matematického aparátu Markovových reťazcov. Parametrizácia a validácia navrhnutého modelu bola vykonaná na empirickom materiáli trvalých výskumných plôch bukových porastov. Praktická aplikácia ukázala, že navrhnutý model poskytuje nevychýlené výsledky a relatívne dobrú presnosť predpovedí relatívneho zastúpenia tried kvality kmeňov na počte stromov na porastovej úrovni. Navrhnutý model je perspektívne použiteľný v rastovom simulátore Sibyla.

Kľúčové slová: *model, kvalita kmeňa, Markovove reťazce, buk*

1. Úvod

Kvalitatívna inventarizácia a následná sortimentácia zásob lesných porastov bola vždy dôležitou súčasťou plánovania a praktického hospodárenia. Ich význam prudko narástol najmä v podmienkach trhového hospodárstva, pretože inventarizácia kvality a hodnoty produkcie poskytuje odbornému lesnému hospodárovi nevyhnutné informácie pre ekonomicky efektívne hospodárenie v lese. Výskum metód kvalitatívnej inventarizácie a sortimentácie zásob lesných porastov bol preto vždy v centre pozornosti lesníckej vedy.

Problematiku kvalitatívnej inventarizácie zásob lesných porastov na Slovensku detailne rozpracoval PRIEŠOL (1961, 1965). Dlhodobý a rozsiahly výskum sortimentačných metód vyvrcholil skonštruovaním prepa-

covaných stromových a porastových sortimentačných tabuliek (PETRÁŠ, NOCIAR, 1991) zostavených sortimentáciou 12 000 stromov zo 167 pokusných plôch. Tabuľky udávajú podiely sortimentov z objemu stromov, alebo zo zásoby porastu pre päť hlavných drevín v závislosti na pomerne ľahko merateľných veličinách, akými sú pri strome hrúbka, kvalita, poškodenie, príp. vek a rastová oblasť, alebo v poraste stredná hrúbka, podiely kvalitatívnych tried, vek a poškodenie. Prepojenie modelov sortimentačných tabuliek s modelmi rastových tabuliek (HALAJ *et al.*, 1987) viedlo k zostaveniu ojedinelých sortimentačných rastových tabuliek (PETRÁŠ & HALAJ & MECKO, 1996). Tabuľky udávajú vývoj podielov sortimentov zo zásob a z celkovej objemovej produkcie v čase podľa jednotlivých drevín a bonít.

Modely rastových sortimentačných tabuliek boli použité aj v rastovom simulátore Sibyla, ktorý na Slovensku zastupuje najnovšiu generáciu rastových modelov (FABRIKA, 2005). Sibyla modeluje rast lesa z úrovne jednotlivého stromu a na začiatku simulácie požaduje ako vstup aj informácie o kvalite a poškodení kmeňov stromov nachádzajúcich sa na modelovanej ploche. V prípade, že uvedené informácie nie sú priamo zisťované, simulátor ich generuje stochasticky, pomocou niektorých čiastkových modelov rastových sortimentačných tabuliek. Vygenerované kvalitatívne charakteristiky následne vstupujú do prebierkového submodelu a hlavne do sortimentácie objemu jednotlivých stromov, z čoho sa pomocou aktuálnych cien dreva dajú odvodiť informácie o hodnote lesa.

Hlavným problémom tohto prepracovaného postupu modelovania je fakt, že kvalitatívne charakteristiky jednotlivých stromov zistené alebo vygenerované na začiatku simulačnej periódy sa považujú za statické, v čase sa nemeniace veličiny, t. j. v priebehu prognózy rastu lesa sa kvalita jednotlivých kmeňov nemení. Podiely kvalitatívnych tried na porastovej úrovni sa menia len v dôsledku redukcie počtu stromov určitej kvality v dôsledku prirodzenej mortality alebo naplánovaných prebierkových zásahov.

Stochastické modelovanie zmien hodnôt kvalitatívnych znakov predstavuje pomerne komplikovaný metodický problém, ktorý sa v odbornej literatúre z oblasti modelovania rastu lesa doteraz riešil iba veľmi zriedkavo (HASENAUER, 2006). Prieskum matematickej a štatistickej literatúry ukázal, že na modelovanie zmien hodnôt kvalitatívnych znakov jednotlivých stromov je vhodné použiť matematický aparát, tzv. Markovových reťazcov (ŠALÁT, 1981; MATEJDES, 1997). V lesníctve bola teória Markovových reťazcov s úspechom použitá na zohľadnenie vplyvu náhodných ťažieb na hospodársko-úpravnícke plánovanie (KOUBA, 1980).

Cieľom predkladanej práce je konceptuálne navrhnúť metodiku modelovania prirodzenej dynamiky zmien kvality stromov a porastov a previesť ju do matematickej formy založenej na použití matematického aparátu tzv. Markovových reťazcov. Možnosti aplikácie zostavenej metodiky budú prakticky prezentované na empirickom materiáli pochádzajúcom z dlhodobých opakovaných meraní trvalých výskumných plôch určených na sledovanie rastu rovnorodých bukových porastov ovplyvňovaných rozličným druhom prebierky, v rámci ktorého sa opakovane vykonáva aj kvalitatívna inventarizácia lesa.

2. Empirický materiál

Empirický materiál použitý na vytvorenie modelu zmien kvalitatívnych charakteristík pochádza z dlhodobého produkčného pokusu Katedry hospodárskej úpravy lesov a geodézie TU vo Zvolene a Lesníckeho výskumného ústavu Zvolen zameraného na rozbor vplyvu prebierok na rast, produkciu a hodnotu rovnoro-

dých bukových porastov. Tvoria ho údaje opakovaných meraní a pozorovaní sérií trvalých pokusných plôch (TVP) založených v rokoch 1959 – 1964 v šiestich lokalitách stredného a západného Slovenska. Všetky výskumné objekty boli založené v porastoch typologicky patriacich prevažne do skupiny lesných typov (slt) *Fagetum pauper* (Fp), ktoré sa nachádzali v rastovej fáze mladiny vo veku 20 – 30 rokov, pochádzali z prirodzenej obnovy a ktoré v dobe založenia buď neboli vychovávané vôbec alebo boli vychovávané iba miernymi zásahmi (HLADÍK, 1990).

Každá séria TVP pozostáva z minimálne troch pokusných parciel o rozmeroch 50 × 50 m, pričom na TVP I sa sleduje vplyv miernej podúrovňovej prebierky stupňa B podľa metodiky nemeckých výskumných ústavov (1902), na TVP III sa vyhodnocuje vplyv akostnej úrovňovej prebierky podľa SCHÄDELINA (1947) a parcela TVP II je ponechaná bez zásahu na samovývoj. Plochy boli periodicky merané a vychovávané zvoleným druhom prebierky. Časová úprava meraní a zásahov bola na všetkých plochách rovnaká. Merania, resp. pozorovania biometrických veličín a prebierkové zásahy sa vykonali najskôr 3× po štyroch rokoch, potom 2× v odstupe piatich rokov a neskoršie sa prešlo na variabilný 7 – 10-ročný interval v závislosti od stavu plochy a pestovnej potreby.

V obdobiach periodických meraní sa na každom trvale číslovanom strome (stromy s hrúbkou $d_{1,3} > 1,6$ cm v dobe založenia) merala hrúbka v mm a okulárne sa pozorovalo relatívne výškové postavenie podľa klasifikácie POLANSKÉHO (1954), kvalita jednotlivých tretín kmeňa a kvalita koruny a zdravotný stav stromu. Výšky stromov sa merali výberovým spôsobom, na páse 10 × 50 m prechádzajúcom stredom každej pokusnej parcely. V prvých obdobiach boli výšky merané pomocou výškomernej laty s presnosťou $\pm 0,1$ m, v ďalších obdobiach bežnými výškomermi s presnosťou $\pm 0,5$ m pri 95 % spoľahlivosti. Okrem toho sa na prierezovom páse zamerala aj poloha stromov na ploche. Hodnotenie kvality kmeňov bolo vykonávané v zmysle klasifikácie definovanej v sortimentačných tabuľkách (PETRÁŠ, NOCIAR, 1991).

Celkovo, empirický materiál použitý v práci pochádza z piatich výskumných objektov nesúcich názov podľa lokality, v ktorej boli založené. Ide o série TVP Cajla, Poruba, Gápeľ, Pernek a Kulháň založené na území západného a stredného Slovenska v 4. bukovom lesnom vegetačnom stupni v stredných horských polohách. Základné popisné informácie o jednotlivých sériách obsahuje tabuľka 1.

Empirický materiál použitý na tvorbu a validáciu matematického modelu vývoja kvality bukových stromov pochádzal výhradne z kontrolných pokusných parciel ponechaných na samovývoj. Len takéto plochy môžu poskytovať obraz o prirodzenej dynamike zmien kvality kmeňov spôsobenej výhradne prírodnými faktormi, oddelene od vplyvu pestovateľských opatrení. Materiál tak pozostáva z piatich až šiestich opakovaných pozoro-

Tabuľka 1. Súhrnná charakteristika výskumných objektov**Table 1.** Summary characteristic of the research objects

Názov objektu ¹⁾	Rok založenia ²⁾	Vek pri založení v rokoch ³⁾	Počet plôch v sérii ⁴⁾	Pohorie ⁵⁾	Slt	Nadmorská výška ⁶⁾ (m n. m.)	Sklon ⁷⁾ (°)	Expozícia ⁸⁾
Poruba	1959	29	3	Kremnické vrchy	<i>Fp nst.</i>	600 – 620	20	V
Gápeľ	1964	21	3	Strážovské vrchy	<i>Fp vst.</i>	640 – 680	25	Z
Cajla	1962	24	3	Malé Karpaty	<i>Fp vst.</i>	650 – 700	20	JZ
Pernek	1960	28	3	Malé Karpaty	<i>Fp nst.</i>	460 – 480	15	JZ
Kulháň	1960	24	4	Považský Inovec	<i>Fp nst.</i>	650 – 700	15	JZ

Poznámka – Note: Slt – skupina lesných typov – *FTG* – forest types groups, *Fp nst.* – Fagetum pauper nižší stupeň – lower level, *Fp vst.* – Fagetum pauper vyšší stupeň – higher level.

¹⁾Name, ²⁾Year of establishment, ³⁾Age in the year of establishment in years, ⁴⁾Number of areas in a series, ⁵⁾Mountain, ⁶⁾Altitude, ⁷⁾Slope, ⁸⁾Orientation

Tabuľka 2. Štruktúra empirických údajov**Table 2.** Structure of the empirical data

Objekt ¹⁾	Vek porastu ²⁾	Relatívne podiely kvality kmeňov ³⁾									
		Parametrizačná vzorka ⁴⁾					Validačná vzorka ⁵⁾				
		n	A	B	C	D	n	A	B	C	D
		(ks)	(%)					(ks)	(%)		
Poruba	29	1 412	16,6	45,5	32,6	5,2	287	24,7	37,6	35,5	2,1
	33	1 233	12,6	54,3	25,8	7,4	260	8,1	48,8	35,4	7,7
	37	1 110	5,0	62,5	26,2	6,3	238	6,7	55,9	29,8	7,6
	42	938	4,4	48,5	33,3	13,9	212	5,7	42,9	35,8	15,6
	47	741	8,4	57,2	24,2	10,3	180	4,4	50,0	35,0	10,6
	53	540	8,5	53,0	27,2	11,3	151	4,6	42,4	40,4	12,6
Gápeľ	21	2 424	1,0	53,2	35,6	10,1	549	0,0	31,3	40,6	28,1
	25	1 566	1,7	67,9	25,9	4,5	353	1,4	69,1	23,5	5,9
	29	1 174	1,7	60,0	22,7	15,7	246	0,4	52,4	26,4	20,7
	34	889	2,0	33,1	58,9	6,0	188	1,1	54,3	42,6	2,1
	39	630	2,4	59,0	32,4	6,2	141	2,8	70,9	24,8	1,4
	44	450	19,8	56,9	19,6	3,8	105	24,8	48,6	25,7	1,0
Cajla	24	5 219	14,3	48,4	27,3	10,0	893	8,6	35,8	32,9	22,6
	28	3 675	2,6	43,1	40,4	13,9	626	2,9	78,9	13,1	5,1
	32	2 452	1,1	51,2	32,5	15,1	367	0,5	55,0	38,1	6,3
	37	1 330	7,5	37,8	27,7	26,9	250	9,6	50,8	28,4	11,2
	42	988	4,8	44,5	32,9	17,8	185	8,6	57,8	25,4	8,1
	48	621	3,1	55,1	31,2	10,6	129	1,6	49,6	38,0	10,9
Pernek	28	2 986	4,1	31,7	54,0	10,3	802	2,2	28,3	55,5	14,0
	32	2 209	2,0	44,9	34,9	18,2	645	0,8	22,3	38,1	38,8
	36	2 113	1,8	46,4	30,2	21,6	607	1,6	59,6	15,8	22,9
	41	1 723	2,0	36,0	20,3	41,7	477	4,4	41,3	11,1	43,2
	46	1 135	4,1	35,7	18,6	41,6	285	3,5	31,9	17,5	47,0
	52	754	2,7	37,8	21,2	38,3	181	2,2	54,1	17,1	26,5
Kulháň	24	2 589	0,0	55,1	36,2	8,7	877	0,1	52,8	38,4	8,7
	28	2 223	0,2	49,6	38,6	11,6	759	0,5	60,1	29,9	9,5
	32	1 583	0,3	35,1	40,0	24,6	517	0,6	42,0	32,1	25,3
	37	800	2,5	44,5	33,8	19,2	232	9,5	59,1	20,3	11,2
	42	724	3,2	45,2	35,2	16,4	220	3,2	55,9	29,1	11,8

¹⁾Object, ²⁾Stand age, ³⁾Relative ratio of stem quality, ⁴⁾Parameterisation sample, ⁵⁾Validation sample

rovaní kontrolných porastov rozličného veku nachádzajúcich sa na piatich výskumných objektoch.

Tabuľka 2 poskytuje detailný prehľad o počte opakovaných meraní, veku porastov v dobe merania a kvalitatívnom stave kontrolných porastov podľa jednotlivých výskumných objektov. Všetky merania boli rozdelené na parametrizačnú a validačnú časť. Parametrizačná časť vznikla rozdelením kontrolných plôch na každom výskumnom objekte o výmere 0,25 ha na dve časti: väčšiu o rozmere 0,20 ha (80 %), na ktorej bol navrhnutý model parametrizovaný a menšiu o výmere 0,05 ha (20 %), na ktorej bol validovaný. Validácia empirického materiálu bola teda vytvorená oddelením 1/5 plochy každej TVP.

Z údajov tabuľky 2 vyplýva, že rozdelenie materiálu na parametrizačnú a validačnú časť bolo pomerne úspešné. Percentuálne podiely kvalitatívnych tried na celkovom počte stromov v daných vekoch sa podľa jednotlivých vzoriek líšia pomerne málo. Všeobecná kvalita stromov rastúcich na výskumných objektoch bola prirodzene veľmi dobrá, keďže porasty pochádzali z prirodzenej obnovy pôvodne kvalitných porastov rastúcich na živných stanovištiach.

3. Metodika

Teoretickým základom modelu vývoja kvality kmeňov stromov sú tzv. Markovove reťazce. Každý Markovov reťazec je vo všeobecnosti daný iniciálnym vektorom pravdepodobností $x_0 \in R^k$, ktorý charakterizuje rozdelenie pravdepodobností možných stavov S_1, S_2, \dots, S_k určitého náhodného javu v počiatočnom čase a stochastickou prechodovou maticou \mathbf{P} k -teho stupňa. Každý element štvorcovej matice \mathbf{P} (p_{ij}) reprezentuje pravdepodobnosť zmeny stavu určitého náhodného javu (napr. hodnoty diskrétného štatistického znaku) z vybraného stavu (konkrétnej hodnoty) S_i do nasledujúceho stavu (na inú hodnotu) S_j . Pre jednotlivé prvky stochastickej matice \mathbf{P} platí $p_{ij} \in \langle 0,1 \rangle$ $i, j = 1, 2, \dots, k$, a súčasne pre každý riadok matice platí $p_{1j} + p_{2j} + \dots + p_{kj} = 1, j = 1, 2, \dots, k$. Markovov reťazec vzniká opakovaným, rekurzívnym násobením stavových vektorov a prechodovej matice:

$$P x_{n-1} = x_n \quad [1]$$

čím sa modeluje rozdelenie pravdepodobností stavov S_1, S_2, \dots, S_k daného javu v rozličných časových obdobiach 1, 2, ..., n , o ktorých sa predpokladá, že sa nachádzajú v konštantnom časovom odstupe. Ak nás zaujíma iba finálne rozdelenie stavov v poslednom n -tom období, informáciu môžeme získať aj pomocou vzťahu:

$$P^n x_0 = x_n \quad [2]$$

Ako už bolo uvedené, uvedený teoretický aparát bol aplikovaný na problematiku modelovania zmien kvality

kmeňov v čase na príklade nevychovaných bukových porastov. Iniciálny stavový vektor x_0 pri takejto aplikácii predstavuje rozdelenie pravdepodobností, resp. početnosti výskytu kvality kmeňov A, B, C, D v poraste v dobe založenia pokusnej parcely a prechodová matica \mathbf{P} popisuje pravdepodobnosti zmeny kvality kmeňa na inú kvalitu pri určitom veku porastu a pri určitej dĺžke prechodového obdobia.

Pod pojmom parametrizácia modelu vývoja kvality stromov sa rozumie stanovenie pravdepodobnosti prechodu určitej kvality kmeňa na inú kvalitu, t. j. zostavenie prechodových matíc \mathbf{P} a popísanie závislostí medzi prvkami \mathbf{P} a vekom porastu vo forme regresných rovníc. Prechodové matice \mathbf{P} musia byť v rozličnom veku a vývojovom štádiu porastu odlišné, pretože vo všeobecnosti vieme, že dynamika zmien kvalít kmeňov s vekom a klesajúcou rýchlosťou rastu stromov ustáva rovnako (ŠEBÍK, POLÁK, 1990).

Prvým krokom praktickej parametrizácie modelu Markovových reťazcov bolo vytvorenie matíc empirických početností zmien kvality kmeňov a ich prevod na prechodovú maticu empirických pravdepodobností a to osobitne pre každú TVP a konkrétnu dĺžku prechodového obdobia v parametrizačnej vzorke:

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ n_{13} & n_{23} & n_{33} & n_{34} \\ n_{14} & n_{24} & n_{34} & n_{44} \end{bmatrix} \end{matrix} \Rightarrow \mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Prevod empirických početností zmien kvality na empirické pravdepodobnosti sa uskutočnil pomocou vzťahu:

$$p_{ij} = \frac{n_{ij}}{\sum n_i} \quad [3]$$

p_{ij} – pravdepodobnosť zmeny kvality kmeňa z i -tej do j -tej kvalitatívnej triedy,

n_{ij} – empirická početnosť zmien kvality kmeňa z i -tej do j -tej kvalitatívnej triedy,

$\sum n_i$ – súčet početností v i -tom riadku matice empirických početností.

Celkovo bolo vytvorených 24 prechodových matíc \mathbf{P} štvrtého stupňa odvodených z kvalitatívnych inventarizácií štyroch TVP počas piatich prechodových období a jednej TVP so štyrmi prechodovými obdobiami. Hlavným logickým prvkom modelovania vývoja kvality kmeňov je predpovedanie diagonálnych pravdepodobností prechodovej matice p_{ii} (p_{ij} pre $i = j$) pre určitý vek porastu t a dĺžku prechodového obdobia Δt :

$$p_{ii} = e^{-[e^{at^b}] \Delta t} \quad [4]$$

Diagonálne prvky matice \mathbf{P} obsahujú pravdepodobnosť, že určitá kvalita kmeňa sa v definovanom precho-

dovom období nezmení. Tvar rovnice použitej na popis uvedenej závislosti bol matematicky zostavený tak, aby funkčným oborom závislej premennej bol interval $(0,1)$. Rovnica bola parametrizovaná 4× osobitne pre každý stupeň kvality kmeňa, t. j. pre každý prvok na diagonále prechodovej matice **P**. Parametre rovníc boli získané nelineárnou regresnou analýzou 24 empirických prechodových matíc z piatich TVP v programe Statistica 7.0 za pomoci Gauss-Newtonovej numerickej optimalizácie.

Rovnice [4] sú schopné predpovedať hodnoty diagonálnych prvkov p_{ii} matice **P** pre definovaný vek porastu t a dĺžku prechodového obdobia Δt . Mimodiagonálne prvky prechodovej matice **P** boli odvodené rozpočítaním sumy mimodiagonálnych prvkov $M_i = 1 - p_i = \sum p_j$ pre $i \neq j$ pre vo vhodnom pomere. Podiel konkrétnej mimodiagonálnej pravdepodobnosti na sume mimodiagonálnych pravdepodobností v i -tom riadku matice **P** sa vypočíta ako $pm_{ij} = p_{ij} / M_i$. O pomeroch mimodiagonálnych prvkov navzájom a ich podiele na sume M_i sa pre zjednodušenie praktického uplatnenia modelu predpokladá, že TVP sa s vekom porastu a dĺžkou prechodového obdobia nemenia. Všeobecné podiely mimodiagonálnych prvkov **P** na ich riadkovej sume M_i preto boli odvodené jednoduchým spriemerovaním 24 empirických mimodiagonálnych podielov zistených na konkrétnych TVP a pre konkrétne prechodové obdobia. Tým sa vytvorila jednotná matica priemerných mimodiagonálnych podielov **MP** platná pre všetky TVP a prechodové obdobia.

Praktický postup aplikácie vytvorenej techniky modelovania je nasledovný:

Z kvalitatívnej inventarizácie sa zistí vstupný stavový vektor \mathbf{x}_0 kvality kmeňov, t. j. rozdelenie početností podľa kvalitatívnych tried v modelovanom poraste na začiatku prechodového obdobia.

Pomocou rovníc [4] sa pre vek porastu t_0 na začiatku prechodového obdobia a pre definovanú dĺžku prechodového obdobia Δt vykoná predpoveď diagonálnych pravdepodobností \hat{p}_{ii} modelovej prechodovej matice **P**. Tým sa pre každý riadok matice (t. j. kvalitatívnu triedu) zároveň predpovie suma mimodiagonálnych pravdepodobností $\hat{M}_i = 1 - \hat{p}_{ii}$.

Predpovedaná suma mimodiagonálnych pravdepodobností \hat{M}_i sa rozpočíta za pomoci príslušného riadku matice priemerných podielov **MP** na jednotlivé mimodiagonálne prvky \hat{p}_{ii} podľa vzťahu $\hat{p}_{ii} = pm_{ij} / \hat{M}_i$. Tým dôjde k vytvoreniu úplnej modelovej prechodovej matice **P** platnej pre definovaný vek porastu t a dĺžku prechodového obdobia Δt .

V poslednom kroku je potom možné predpovedať stavový vektor (rozdelenie početností kvalitatívnych tried) na konci prechodového obdobia podľa vzťahu $\hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{P}\mathbf{x}_0$.

Praktická validácia použiteľnosti modelu je založená na porovnávaní modelových relatívnych početností kvalitatívnych tried $\hat{\mathbf{x}}_1$ so skutočnými relatívnymi početnosťami \mathbf{x}_1 na konci príslušného prechodového obdobia vo validačnej časti empirického materiálu. Porovna-

nie skutočných a modelových stavových vektorov \mathbf{x}_1 na konci prechodových období bolo vykonané pre jednotlivé TVP a prechodové obdobia. Praktická použiteľnosť navrhnutého postupu bola posúdená pomocou bežných štatistických charakteristík, ktoré popisujú bias, presnosť a správnosť modelu.

4. Výsledky a diskusia

4.1. Parametrizácia modelu

Výsledky parametrizácie modelu vývoja kvality stromov získané na parametrizačnej časti empirického materiálu sú obsiahnuté v tabuľkách 3 a 4 a sú ilustrované na obrázkoch 1 a 2.

Tabuľka 3 obsahuje parametre rovnice [4] popisujúcej závislosť medzi diagonálnymi prvkami prechodových matíc **P**, vekom porastu t a dĺžkou prechodového obdobia Δt . Rovnica bola parametrizovaná osobitne pre každý diagonálny prvok, t. j. osobitne pre každú kvalitatívnu triedu A, B, C, D bežnými metódami nelineárnej regresnej analýzy. Rovnice tak dovoľujú predpovedať pre každú kvalitatívnu triedu, vek porastu a dĺžku prechodového obdobia pravdepodobnosť, že sa počiatočná kvalita kmeňa v prechodovom období nezmení. Obrázky 1 a 2 detailnejšie ilustrujú, že získané trojrozmerné regresné modely vykazujú logický priebeh a biologicky očakávané správanie podľa hodnôt jednotlivých nezávislých premenných.

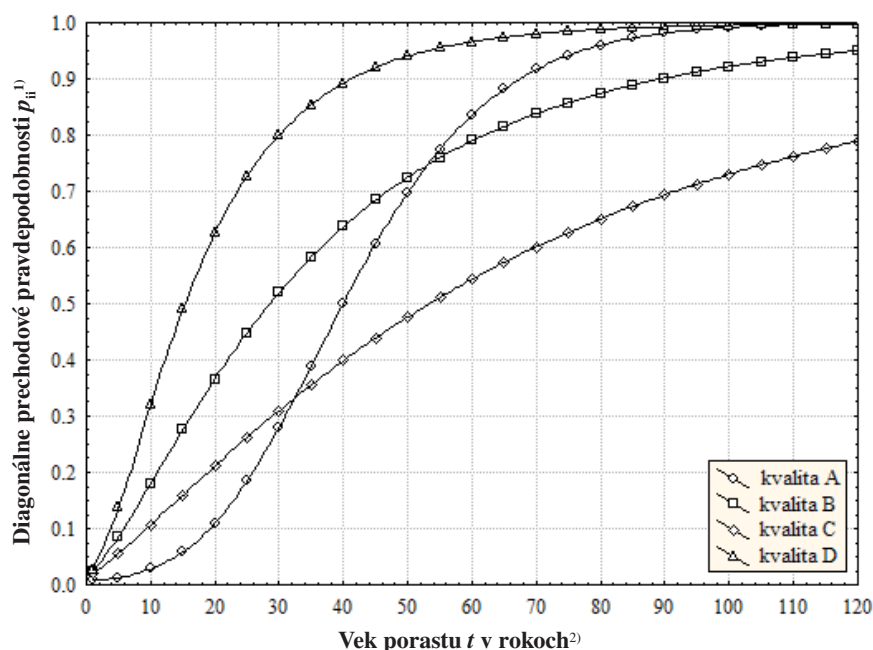
Obrázok 1 znázorňuje priebeh pravdepodobnosti p_{ii} podľa kvalitatívnych tried A – D v závislosti na meniacom sa veku t pri konštantnej dĺžke prechodového obdobia $\Delta t = 5$ rokov. Z obrázku je zrejmé, že so zvyšujúcim sa vekom sa diagonálna pravdepodobnosť p_{ii} približuje k asymptote 1, čo z praktického hľadiska znamená, že so zvyšujúcim vekom stúpa pravdepodobnosť, že sa kvalita kmeňa za určité prechodové obdobie nezmení. To odpovedá biologickému očakávaniu – v starších porastoch s ustávajúcou dynamikou rastu a stabilizovanou vertikálnou a horizontálnou štruktúrou sa dá očakávať aj stabilizácia kvality stromov. Pomerne zaujíma-

Tabuľka 3. Parametre rovníc [4] závislostí medzi diagonálnymi pravdepodobnosťami prechodovej matice **P**, vekom porastu t a dĺžkou prechodového obdobia Δt

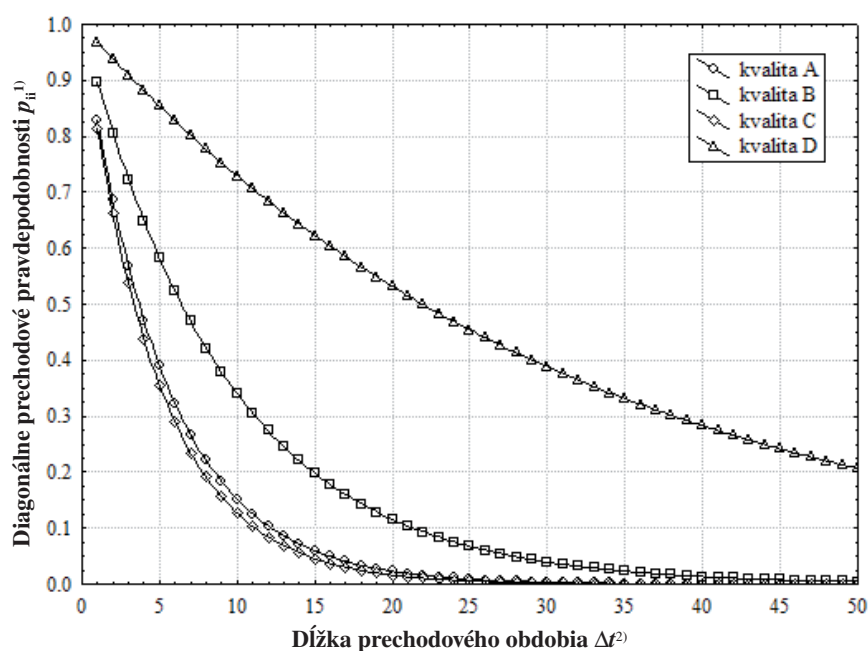
Table 3. Parameters of conditional equations between diagonal probabilities of transmission matrix **P**, stand age t and the length of the transmission period Δt

Kvalita kmeňa ¹⁾	Koefficienty regresných rovníc ²⁾	
	a	b
A	-0,017643	1,279456
B	-0,276601	0,586551
C	-0,234825	0,535574
D	-0,312374	0,675982

¹⁾Stem quality, ²⁾Coefficients of regression equation



Obr. 1. Závislosť diagonálnych pravdepodobností prechodovej matice \mathbf{P} na veku porastu t pri $\Delta t = 5$ rokov
Fig. 1. Relation of diagonal probabilities of a transmission matrix P at the stand age t , where $\Delta t = 5$ years
¹⁾Diagonal transmission probabilities, ²⁾Stand age t in years



Obr. 2. Závislosť diagonálnych pravdepodobností prechodovej matice \mathbf{P} na dĺžke prechodového obdobia Δt pri $t = 35$ rokov
Fig. 2. Relation of diagonal probabilities of a transmission matrix P to the length of a transmission period Δt , where $t = 35$ years
¹⁾Diagonal transmission probabilities, ²⁾Length of a transmission period

vým zistením je fakt, že s vekom rýchlejšie ustáva dynamika zmien krajných tried A a D a naopak pomalšie prechodných tried B a C. Pri kvalitách B a C teda model pripúšťa zvýšenú možnosť, že sa kvalita stromu zmení aj vo vyššom fyzickom veku.

Priebeh pravdepodobností p_{ii} podľa jednotlivých kvalitových tried v závislosti od meniacej sa dĺžky prechodového obdobia Δt pre vybraný vek porastu 35 rokov je znázornený na obrázku 2. Z priebehu je zrejmé, že rovnica [4] predpokladá, že so vzrastajúcou dĺžkou

prechodového obdobia Δt sa hodnoty p_{ii} približujú k 0. Z praktického hľadiska teda s narastajúcou dĺžkou Δt narastá pravdepodobnosť, že strom zmení svoju kvalitu, čo je opäť logické očakávanie. Exponenciálny charakter poklesu pravdepodobností je výrazný pri triedach A, B a C, ale je oveľa menej výrazný pri triede D. To sa dá interpretovať aj tak, že vplyv dĺžky prechodového obdobia Δt je pri stupni kvality D najmenší a keď strom dosiahne kvalitu D, tak tá sa v budúcnosti zmení s výrazne nižšou pravdepodobnosťou, ako je tomu pri ostatných kvalitách.

Tabuľka 4 obsahuje maticu priemerných podielov mimodiagonálnych prvkov **PM** odvodenú z empirických prechodových matíc **P** v parametrizačnej časti empirického materiálu. Ak predpokladáme, že kvalita kmeňa sa v určitom prechodovom období zmení, tak potom pri krajných kvalitách A a D dochádza väčšinou k posunu iba o 1 triedu, zatiaľ čo pri prechodných kvalitách B a C môže s vyššou pravdepodobnosťou dochádzať k posunom až o 2 triedy. Toto opäť dokumentuje, že dynamika prechodov kvalít kmeňov v prostredných kvalitových triedach B a C je vyššia ako v okrajových triedach A a D.

Tabuľka 4. Matica **PM** – priemerné podiely mimodiagonálnych prvkov na riadkovej sume

Table 4. Matrix **PM** – average shares of extra-diagonal elements in line sum

Kvalita kmeňa ¹⁾	A	B	C	D
A	—	0,92574	0,04587	0,02838
B	0,07955	—	0,48755	0,43289
C	0,00515	0,29527	—	0,69958
D	0,01397	0,19661	0,78942	—

¹⁾ Stem quality

Na základe rovníc [4] a matice **PM** môžeme plne definovať prvky ľubovoľnej prechodovej matice **P** pre rozličné veky porastov a očakávané dĺžky prechodových období. Takéto matice a metodika sa v rastovom simulátore Sibyla môžu prakticky poslúžiť na namodelovanie kvalitatívneho stavu celého porastu na konci prechodového obdobia vo forme rozdelení relatívnych alebo absolútnych početností kvalitových tried. Okrem toho sa však dajú stochasticky použiť aj na stromovej úrovni, keď každý riadkový vektor prechodovej matice **P** predstavuje z pohľadu jednotlivého stromu v podstate rozdelenie pravdepodobností prechodu východzej kvality kmeňa na inú kvalitu v neskoršom veku a pri predpokladanej dĺžke prechodového obdobia. Stochastický postup môže byť úplne rovnaký ako sa používa pre generovanie kvality stromov na začiatku celého simulačného cyklu (FABRIKA, 2005). Prechodové matice používané na stochas-

tické modelovanie zmien kvality kmeňov môžu byť iteratívne upravované vo veľmi jemnom časovom odstupe 1 roka, stačí ak sa rovnice [4] budú opakovane používať pri fixovanej dĺžke prechodu 1 rok.

4.2. Validácia modelu

Sumárne výsledky porovnávania modelových a skutočných rozdelení relatívnych početností kvality kmeňov na validačnej časti empirického materiálu sú uvedené v tabuľke 5. Táto obsahuje charakteristiky chýb predpovedí relatívnych početností (podielov) vypočítaných z porovnania skutočných a predpovedaných početností podľa jednotlivých kvalitových tried. Z jednotlivých chýb relatívnych početností určitej kvality kmeňa stanovených osobitne pre každú TVP a prechodové obdobie sa vypočítal aritmetický priemer chýb $\bar{e}\%$ ako miera vychýlenia, smerodajná odchýlka chýb $s_e\%$ ako miera presnosti a stredná kvadratická chyba $m_e\%$ ako miera celkovej správnosti modelu. Okrem toho bola Studentovým t -testom otestovaná hypotéza $H_0: \bar{e}\% = 0$.

Tabuľka 5. Charakteristiky chýb predikcie relatívnych početností kvality kmeňov v % na konci prechodových období vo validačnej vzorke

Table 5. Characteristics of the prediction errors of the relative stem quality number in % at the end of the transmission period in a validation sample

Charakteristiky chýb modelu ¹⁾	Kvalita kmeňa ²⁾			
	A	B	C	D
Bias $\bar{e}\%$	-0,02	2,84	-0,83	-1,98
Testovacie kritéria ³⁾ t	-0,03	1,06	-0,47	-0,76
Presnosť ⁴⁾ $s_e\%$	3,64	12,54	8,27	12,27
Správnosť ⁵⁾ $m_e\%$	3,72	12,81	8,45	12,54

Poznámka – Note: Testovacie kritéria t boli porovnávané s kritickou hodnotou $t_{0,025(23)} = 2,3978$, takže závery štatistického testovania boli robené na hladine významnosti $\alpha = 5\%$ – Tested criteria were compared with a critical value $t_{0,025(23)} = 2.3978$, therefore, results of a statistic testing were done at a significance level $\alpha = 5\%$.

¹⁾Characteristics of a model errors, ²⁾Stem quality, ³⁾Tested criteria, ⁴⁾Accurac, ⁵⁾Correctness

Štatistické testy významnosti vychýlení modelu $\bar{e}\%$ podľa jednotlivých kvalitatívnych tried ukázali na hladine významnosti $\alpha = 5\%$, že chyby predpovedí relatívnych zastúpení kvalitových tried majú vo všetkých prípadoch náhodný charakter. Navrhovaný model vývoja kvality kmeňov môžeme teda považovať za nevychýlený.

Absencia významnejšieho vychýlenia sa následne prejavuje aj na minimálnych rozdieloch smerodajných odchýlok $s_e\%$ a stredných kvadratických chýb predikcie $m_e\%$, takže presnosť a správnosť modelu sa dá integrovane posúdiť na základe ľubovoľnej z nich. Výsledky ukazujú, že model najpresnejšie predpovedá zastúpenie

kvalitatívnej triedy A so strednou chybu $\pm 3,6\%$, ktorá je približne 2 – 3× menšia ako stredné chyby predikcie relatívnych podielov ostatných tried, ktoré sa pohybujú okolo $\pm 10\%$ (od 8,5 – 12,8 %). Toto zrejme súvisí so všeobecne nižšou dynamikou zmien kvality A konštatovanou už pri popise modelu.

Ak porovnáme dosiahnuté hodnoty $m_e\%$ so strednými chybami predikcie podielov sortimentov zo zásoby porastu stanovených pomocou sortimentačných tabuliek aplikovaných na úrovni konkrétneho porastu, ktoré sa pri drevine buk pohybujú na úrovni 24 – 37 % (PETRÁŠ, NOCIAR, 1991), tak môžeme konštatovať, že dosiahnuté stredné chyby predikcie $m_e\%$ sú vyhovujúce. Pritom je potrebné ešte zobrať do úvahy, že predikcia podielov jednotlivých kvalitatívnych tried na konci prechodových období bola porovnávaná so skutočnými podielmi odvodenými z pomerne malej plochy 500 m². Preto sa dá očakávať, že pri aplikácii modelu na predpoveď podielov kvalitatívnych tried odvodených z väčších plôch, s nižšou variabilitou, sa jeho presnosť ešte zvýši.

5. Záver

Výskum metód kvalitatívnej inventarizácie a sortimentácie zásob lesných porastov bol vždy v centre pozornosti lesníckej vedy. Dlhodobý a rozsiahly výskum vyvrcholil skonštruovaním prepracovaných sortimentačných a sortimentačných rastových tabuliek (PETRÁŠ, NOCIAR, 1991; PETRÁŠ, HALAJ, MECKO, 1996). Modely sortimentačných rastových tabuliek boli v statickej forme použité aj v rastovom simulátore Sibyla (FABRIKA, 2005). Z tohto dôvodu bola v rámci predkladanej práce navrhnutá a experimentálne preverená jedna z možných metód modelovania prirodzenej dynamiky zmien kvality stromov a porastov matematicky založená na použití Markovových reťazcov. Možnosti tohto postupu sú v práci prezentované na empirickom materiáli pochádzajúcom z dlhodobých opakovaných meraní trvalých výskumných plôch určených na sledovanie rastu rovnorodých bukových porastov ovplyvňovaných rozličným druhom prebierky. Validácia ukázala, že navrhnutý model nevykazuje vychýlené odhady a vyznačuje sa relatívne dobrou správnosťou predikcie relatívneho zastúpenia kvalitatívnych tried na porastovej úrovni. Navrhnutý postup je potenciálne využiteľný na modelovanie dynamických zmien kvality kmeňov jednotlivých stromov v rastovom simulátore Sibyla, čo by mohlo prispieť k zvýšeniu jeho realistikosti.

Podakovanie

Tento výskum bol realizovaný v rámci projektu VEGA č. 1/0534/09 „Zisťovanie, monitorovanie stavu lesa a prognózaovanie jeho vývoja“.

Literatúra

- FABRIKA M., 2005: Simulátor biodynamiky lesa Sibyla. (Habilitationná práca), Zvolen: Technická univerzita vo Zvolene, 238 s.
- HASENAUER H., 2006: Sustainable Forest Management: growth models for Europe. Berlin: Springer, 398 p.
- HALAJ J. *et al.*, 1987: Rastové tabuľky hlavných drevín ČSSR. Bratislava: Príroda, 362 s.
- HLADÍK M., 1990: Rozbor rastových procesov lesných porastov na podklade informácií zisťovaných na TVP. (Záverečná správa výskumnej úlohy), Zvolen: VŠLD, 224 s.
- KOUBA J., 1980: Použití teorie náhodných procesů, zejména teorie Markovových řetězců v lesnickém výzkumu. (Studie), Praha: Vědecký lesnický ústav VŠZ, 16 s.
- MATEJDES M., 1997: Lineárna algebra. Zvolen: Mat-centrum, 275 s.
- PETRÁŠ R., NOCIAR V., 1991: Sortimentáčne tabuľky hlavných drevín. Bratislava: vydavateľstvo SAV, 304 s.
- PETRÁŠ R., HALAJ J., MECKO J., 1996: Sortimentáčne rastové tabuľky. Bratislava: Slovak Academic Press, 249 s.
- POLANSKÝ B., 1954: Za lepší výchovu lesních porostů: Příspěvek k otázce výchovy lesních porostů. Lesnická knihovna: Malá řada – svazek 51, Praha: SZN, 118 s.
- PRIESOL A., 1961: Základy kontroly produkcie v rámci hospodárskej úpravy lesov. Bratislava: vydavateľstvo SAV, 131 s.
- PRIESOL A., 1965: Náuka o produkcii dreva. Bratislava, SVPL, 168 s.
- ŠEBÍK L., POLÁK L., 1990: Náuka o produkcii dreva. Bratislava: Príroda, 322 s.
- ŠALÁT T., 1981: Malá encyklopédia matematiky. Bratislava: Obzor, 577 s.

Summary

Methods for the qualitative inventory and assortment of stand stock were always in the centre of attention of forestry science and a long-term research culminating in the construction of the assortment and assortment growth tables (PETRÁŠ, NOCIAR, 1991). The partial models of assortment growth tables were also used in the growth simulator Sibyla (FABRIKA, 2005), but the models served only for a stochastic generation of tree stem quality at the beginning of the simulation period. Therefore, this paper describes one of the possible mathematical approaches for modelling of natural dynamics of quality trees changes and stands based upon the use of so called Markov chains is described in this paper. The practical application of the designed model is presented by repeated empirical data from permanent research plots based on monitoring and analyzing the impacts of different thinning methods on growth and yield of pure beech stands. Results show no bias of proposed model and it has also relatively good precision of the relative frequency of the stem quality prediction at the stand level. Therefore, the proposed model is potentially usable for modelling of individual trees quality dynamic changes in the growth simulator Sibyla, which could contribute to the further improvement of the biological realism of model simulations.

Translated by: authors